ДИС 22 11 12

Ред е сума от членовете на редица (u_n)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = u_1 + u_2 + \dots$$

Имаме съответствие м/у редици и редове

на редица → ред
на ред → редица

Нека е даден ред $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ $u_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}$

съпоставяме му $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ - редица от частични суми на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Ако е дадена редица, то можем да ѝ съпоставим ред чиито редици от частични суми е дадената редица

$$S_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - a_k$$

редът е $a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)$

$$S_n = a_1 + a_2 - a_1 - \dots + a_{n+1} - a_n = a_{n+1}$$

Деф $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ се нарича сходящ ред ако е сходяща $\sum_{k=1}^{n} u_k$ при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ (сума на реда е граница)}$$

Th

Ако $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е т.че $u_k > 0$ за $\forall k \in \mathbb{N}$ то ако

от известно място нататък е изпълнено

$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq q < 1$ $\quad 0 < q < 1$ то

редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е сходящ $\quad |||$

Критерии на Даламбер ...

При $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$\lim S_n = \frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1 \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ е сходящ при $|q| < 1$ и

разходящ при $|q| > 1$

Th

Ако $\sum u_k$ е сходящ а $\sum |u_k|$ е разходящ (т.е. $\sum u_k$ е условно сходящ def) то за $\forall A \in \mathbb{R}$ $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция т.че

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{\sigma(k)} = A$$

Произведение на редове

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \sum_{k=1}^{\infty} v_k$ се нарича реда $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$

$w_k = u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \dots u_k v_1$

Th
Ако $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ са сходящи

(поне едни абсолютно сходящ) то реда произведение $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ е сходящ - Ако и двата

са абсолютно сходящи то и произведението е абсолютно сходящ $\sum w_k = \sum_{j=1}^{k} u_j v_{n-j}$

Критерии на Лайбниц за редове от вида

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k \quad (u_k > 0)$

Ако $u_k \to$ $u_k \downarrow$ то $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k$ е сходящ

$e^{x+y} = e^x e^y$

$e^x e^y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{y^e}{e!} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$

$w_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} \Rightarrow e^{x+y} = \sum_{k+1}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$

$(x+y)^k = \sum \binom{k}{j} x^j y^{k-j} \qquad \frac{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$

$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k}_{\parallel} = e^{x+y}$